**Examenul de bacalaureat naţional 2019**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| **5p** | **1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$. |
| **5p** | **2.** Determinați numărul real $a$, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$. |
| **5p** | **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2019^x+2019^{-x}=2$. |
| **5p** | **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară. |
| **5p** | **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei $d$ care trece prin $A$ și este perpendiculară pe $AB$. |
| **5p** | **6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$. |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right)=0$, pentru orice număr real $a$. |
| **5p** | **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi. |
| | **2.** Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde $m$ și $n$ sunt numere reale. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale $m$ și $n$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi numerele reale $m$ și $n$, știind că polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $X^2-1$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale $m$ și $n$, unde $x_1$, $x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$. |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | |
|---|---|
| | **1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. |
| **5p** | **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei $f$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale. |
| | **2.** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$. |
| **5p** | **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$. |

| | |
|---|---|
| **5p** | **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu $e^2$. |
| **5p** | **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$. |